جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

مقرر نظرية الجبور
السنة الرابعة رياضيات (جبر)
الفصل الثالث ٢٠١٦ – ٢٠١٧

المدة: ساعة ونصف
الدرجة: ١٠٠
اسم الطالب: [redacted]

**السؤال الأول:**

ليكن $A$ جبراً فوق الحلقة التبديلية والواحدية $R$. والمطلوب:

١ – لنفرض أن $B$ مثالياً في $A$. أثبت أن كل جبر جزئي من جبر الخارج $A/B$ هو من الشكل $N/B$ حيث $N$ هو جبر جزئي في $A$ يحوي $B$. ثم أثبت أن $B$ هو نواة لتشاكل جبور غامر.

**السؤال الثاني:**

ليكن $A$ جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية $R$. والمطلوب:

١ – عرف كلاً من المثالي التام والمثالي المميز في $A$ ثم أثبت أن جداء مثاليين مميزين في $A$ هو مثالي مميز في $A$.

٢ – عرف جبر لي نصف البسيط ثم أثبت أن الجبر $A$ يكون نصف بسيط عندما وفقط عندما لا يوجد في $A$ مثالي مغاير للصفر قابل للحل.

٣ – ليكن $A'$ جبري لي أخر فوق الحلقة $R$ و $f: A \to A'$ تشاكل جبور لي. لنفرض أن $I$ مثالياً في $A$ وأن $\pi: A \to A/I$ التشاكل القانوني الغامر. إذا كان $I \subseteq Ker(f)$ أثبت أنه يوجد تشكل جبور لي وحيد $\lambda: A/I \to A$ يحقق $\lambda\pi = f$.

**السؤال الثالث:**

أثبت أن كل جبر لي $A$ بعده يساوي 3 فوق حقل ما $K$ قاعدته المجموعة $\{e_1, e_2, e_3\}$ تحقق الشروط الآتية:

$$[e_1,e_2]=ae_1,\ [e_1,e_3]=be_1,\ [e_2,e_3]=ce_1 - fbe_2 + fae_3$$

حيث $a, b, c, f \in K$ عناصر مغايرة للصفر، يكون قابلاً للحل.

**السؤال الرابع:**

ليكن $A$ جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية $R$. والمطلوب:

١ – أثبت أن مجموعة تطبيقات الاشتقاق الداخلية $Inn(A)=\{d_a : a \in A\}$ تشكل مثالياً في $Der(A)$.

٢ – أثبت أن المجموعة $Z(A)=\{a : a \in A;\ [a,z]=0,\ \forall z \in A\}$ تشكل مثالياً مميزاً في $A$.

٣ – أثبت أن $A/Z(A) \cong Inn(A)$، أي أن جبر لي الخارج $A/Z(A)$ يماثل $Inn(A)$.

انتهت الأسئلة

حمص في ٢٧ / ٨ / ٢٠١٧

د. حمزة حاكمي

# سلم تصحيح مقرر نظرية الجبر
## السنة الرابعة رياضيات (جبر)
## الفصل الثاني ٢٠١٦ – ٢٠١٧ م.

### السؤال الأول ١٥ درجة

ـ ليكن $\bar{N}$ جبراً جزئياً من $\frac{A}{B}$ ولنأخذ المجموعة $N=\{x: x\in A, x+B\in \bar{N}\}$ سنجد أن
$N\subseteq A$ مجموعة جزئية في $A$ وغير خالية لأن $0\in A$ وأن $B=0+B\in\bar{N}$
ليكن $x,y\in N$ و $\alpha,\beta\in R$ عندئذ $\alpha(x+B), \beta(y+B)\in \bar{N}$ أي أن
د/٨ وأن $\alpha(x+B)+\beta(y+B)\in\bar{N}$
$$(\alpha x+\beta y)+N=(\alpha x+N)+(\beta y+N)\in\bar{N}$$
وبما أن $x,y\in A$ نجد أن $\alpha x+\beta y\in A$ وبالتالي $\alpha x+\beta y\in N$.
من جهة أخرى فإن $(x+B)(y+B)\in\bar{N}$ فيكون ومنه $x\cdot y+B\in\bar{N}$
وبما أن $x,y\in A$ فإن $x\cdot y\in N$ مما سبق نجد أن $N$ جبر جزئي في $A$
وأن $B\subseteq N$ لأنه إذا كان $a\in B$ فإن $a+B=B\in\bar{N}$ ومنه نجد أن $a\in N$
وأن $B$ مثالي في $N$ لأن $B$ مثالي في $A$. أيضاً إذا كان $x\in N$ و
$b\in B$ فإن $x\in A$ وأن $bx, xb\in B$ وهكذا نجد أن $\frac{N}{B}$ جبر جزئي من $R$ كلها
لنبرهن على أن $\bar{N}=\frac{N}{A}$. ليكن $\bar{x}\in\bar{N}$ عندئذ فإن $\bar{x}\in\frac{A}{B}$ ومنه $\bar{x}=a+B$
حيث $a\in A$. أيضاً بما أن $\bar{x}\in\bar{N}$ فإن $a\in N$ وهكذا نجد أن $\bar{x}=a+B\in\frac{N}{B}$
أي أن $\bar{N}\subseteq\frac{N}{B}$. ليكن $y+B\in\frac{N}{B}$ عندئذ فإن $y\in N$ ومنه فإن $y+B\in\bar{N}$
وهذا يبين أن $\frac{N}{B}\subseteq\bar{N}$ مما سبق نجد أن $\bar{N}=\frac{N}{B}$.

ـ ليكن $B$ مثالياً في $A$ ولنعرف الغمر $f: A\to\frac{A}{B}$ بالشكل الآتي: إذا كان $a\in A$
فإن $f(a)=a+B$ نجد أن $f$ معرف جيداً لأنه إذا كان $a,b\in A$ بحيث $a=b$ نجد أن
$$f(a)=a+B=b+B=f(b)$$
د/٧ و $f$ تشاكل لأن $f(a+b)=(a+b)+B=(a+B)+(b+B)$
$$=f(a)+f(b)$$
كما أن $f$ غامر لأنه إذا كان $c+B\in\frac{A}{B}$ فإن $c\in A$ وأن $f(c)=c+A$
لنبرهن على أن $B=Ker(f)$. ليكن $a\in Ker(f)$ عندئذ فإن $f(a)=B$ ومنه
$a+B=B$ ومنه $a\in B$ وهذا يثبت $Ker(f)\subseteq B$
ليكن $b\in B$ عندئذ فإن $b\in A$ وأن $f(b)=b+B=B$ ومنه نجد أن $b\in Ker(f)$
ومنه نجد أن $B\subseteq Ker(f)$ وهكذا فإن $B=Ker(f)$

### السؤال الثاني (١٥ + ١٣ + ١٢ = ٤٠) د/ج

١= نقول عن المثالي $B$ أنه تام إذا كان $Z(B)=0$ و $Der(B)=Inn(B)$.
نقول عن المثالي $B$ إنه مميز إذا كان $B$ مغلقاً جزئياً في $A$ وحقيقة $d(I)\subseteq I$ وذلك أياً كان $d\in Der(A)$.
د/١٢ ليكن $I, J$ مثاليين مميزين في $A$، إن $[I, J]$ حسب التعريف مغلق جزئي
في $A$. لنفرض أن $\Sigma=\{[x,y]: x\in I, y\in J\}$ عندئذ أياً كان $z\in\Sigma$ نجد $d\in Der(A)$
بأن $z=[x,y]$ حيث $x\in I, y\in J$ وأن $d(z)=d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$
وبما أن كلاً من $[dx,y], [x,d(y)]\in\Sigma$ نجد أن
$$d(z)=[d(x),y]+[x,d(y)]\in[I,J]$$
وهذا يبين أن $[I, J]$ مثالي مميز في $A$.

٢ـ لزوم الشرط، لنفرض أن $A$ جبر نصف بسيط ولنفرض جدلاً أن $B\neq0$ مثالي تام
د/١٣ قابل للحل في $A$ ولنفرض أن $k$ أصغر عدد طبيعي موجب من أجله $D^kB=0$ ومنه فإن
$D^{k-1}B\neq0$ ومنه $D^kB=[D^{k-1}B, D^{k-1}B]=0$ وهذا يبين أن $D^{k-1}B$
مثالي تبديلي في $A$ مغاير للصفر وهذا تناقض ومنه $B=0$.
كفاية الشرط، ليكن $B$ مثالي تبديلي في $A$ عندئذ $[B,B]=0$ ومنه $DB=0$
أي أن $B$ قابل للحل وحسب الفرض نجد أن $B=0$ ومنه فإن $A$ جبر نصف بسيط.

بما أن $I$ مثالي في $A$ فإن $\frac{A}{I}$ جبر لي. لنعرف العلاقة $\Theta : A/I \longrightarrow A'$
ثانياً: إذا كان $a+I \in A/I$ فإن $\Theta(a+I) = f(a)$ نثبت أن $\Theta$ تطبيق
فإذا كان $a+I, b+I \in A/I$ حيث $a+I = b+I$ أي أن $(a-b)+I = I$
سيكون $a-b \in Ker(f)$ وبالتالي $f(a-b) = 0$ ومنه $f(a) = f(b)$ أي أن
$\Theta(a+I) = \Theta(b+I)$ وأن $\Theta$ تشاكل لأن
$\Theta[(a+I)+(b+I)] = \Theta((a+b)+I) = f(a+b) = f(a)+f(b)$
$= \Theta(a+I) + \Theta(b+I)$
وإذا كان $\alpha \in R$ فإن
$\Theta(\alpha(a+I)) = \Theta(\alpha a+I) = f(\alpha a) = \alpha f(a) = \alpha\Theta(a+I)$
كما أن
$\Theta([a+I, b+I]) = \Theta([a,b]+I) = f([a,b])$
$= [f(a), f(b)] = [\Theta(a+I), \Theta(b+I)]$
ومنه فإن $\Theta$ تشاكل جبور لي.
ثانياً أنه إذا كان $a \in A$ فإن $\Theta\pi = f$ حيث $\pi$ تشاكل الطبيعي ومنه $\Theta\pi(a) = \Theta(a+I) = f(a)$
أخيراً لنفرض أن $\mu : A/I \longrightarrow A'$ تشاكل آخر يحقق $\mu\pi = f$، لنوضح عدم تكرار $\Theta$ وحيد، ليكن
$a+I \in A/I$ فإن
$\mu(a+I) = \mu\pi(a) = f(a) = \Theta\pi(a) = \Theta(a+I)$
وهكذا فإن $\mu = \Theta$.

السؤال الثالث: ١٥ درجة
ليكن $z \in DA = [A,A]$ فستوجد $x, y \in A$ حيث $z = [x,y]$، إن
$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, \quad y = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$
حيث $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in K$ وأن
$z = [x,y] = \alpha\beta'[e_1,e_2] + \alpha\gamma'[e_1,e_3] + \beta\alpha'[e_2,e_1]$
$+ \beta\gamma'[e_2,e_3] + \gamma\alpha'[e_3,e_1] + \gamma\beta'[e_3,e_2]$
$z = [x,y] = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)[e_1,e_2] + (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)[e_1,e_3] +$
$+ (\beta\gamma' - \gamma\beta')[e_2,e_3].$
وبالتالي
$z = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)ae_1 + (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)be_1 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)(ce_1 - fbe_2 + fae_3)$
$= \lambda e_1 + \mu(ae_3 - be_2) \; ; \; \lambda = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)a + (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)b + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)c$
$\mu = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)f, \quad e' = ae_3 - be_2$
ومنه $z = \lambda e_1 + \mu e'$ وهذا يبين أن $DA$ مولد بالمجموعة $\{e_1, e'\}$، لنتحقق من أن
$D^2A = 0$، ليكن $z \in D^2A$ عندئذ $z \in [DA, DA]$ ومنه $z = [x,y]$ حيث $x, y \in DA$
أي أن
$x = \lambda e_1 + \mu e', \quad y = \lambda_1 e_1 + \mu_1 e'$
حيث $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1 \in K$ لكن لدينا أن
$z = [x,y] = [\lambda e_1 + \mu e', \lambda_1 e_1 + \mu_1 e']$
$= (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)[e_1, e'] = (\lambda\mu_1 - \mu_1\lambda)[e_1, ae_3 - be_2]$
$= (\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)(abe_1 - abe_1) = 0$
وهذا يبين أن الجبر $A$ قابل للحل ودليله 2.

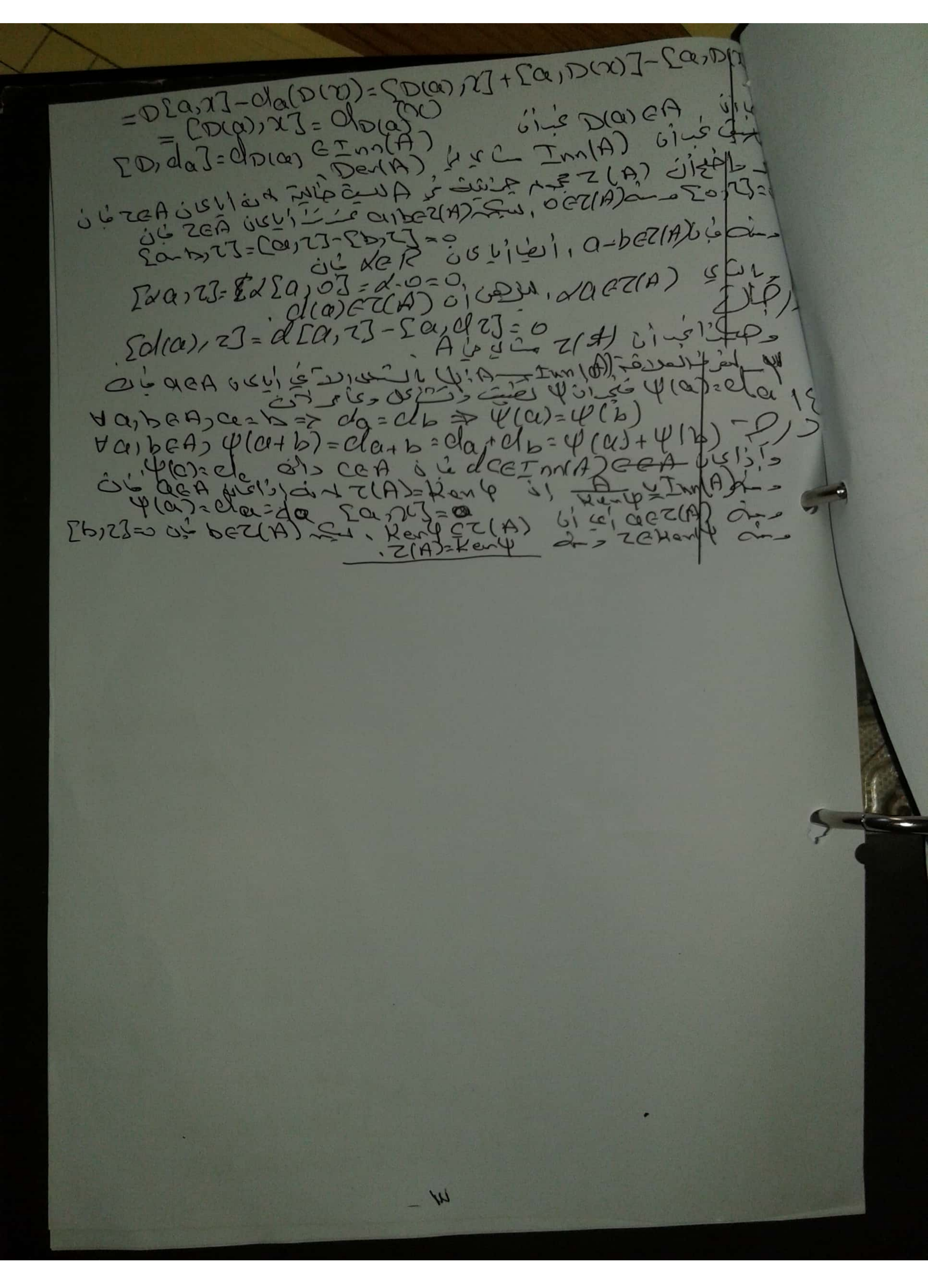
السؤال الرابع: (٨ + ٨ + ١٤ = ٣٠ درجة)
أ - لنثبت أن $Inn(A)$ مجموعة جزئية من $Der(A)$ وغير خالية، لأن $0 \in A$ وبالتالي فإن
$d_0 \in Inn(A)$، ليكن $d_a, d_b \in Inn(A)$ حيث $a, b \in A$، إذا كان $x \in A$ فإن
$(d_a - d_b)(x) = d_a(x) - d_b(x) = [a,x] - [b,x] = [a-b, x] = d_{a-b}(x)$
أي أن $a - b \in A$ لأن $d_a - d_b = d_{a-b} \in Inn(A)$. أيضاً إذا كان $\alpha \in R$ فإن
$(\alpha d_a)(x) = \alpha d_a(x) = \alpha[a,x] = [\alpha a, x] = d_{\alpha a}(x)$
وبما أن $\alpha a \in A$ فإن $\alpha d_a = d_{\alpha a} \in Inn(A)$، وهكذا نجد أن $Inn(A)$
جبر جزئي في $Der(A)$، ليكن $D \in Der(A)$ و $d_a \in Inn(A)$ حيث $a \in A$
لنبرهن أن $[D, d_a] \in Inn(A)$، إذا كان $x \in A$ فإن
$[D, d_a](x) = [D d_a - d_a D](x) = D d_a(x) - d_a D(x) =$

٨ / درجات

٨ / درجات

٧ / درجات

٨ / درجات



$[D(a),x] + [a,D(x)] - [a,D(x)]$

$= D[a,x] - d_a(D(x)) = [D(a),x]$

$= [D(a),x] = d_{D(a)}(x)$ وبما أن $D(a)\in A$ فإن

$[D, d_a] = d_{D(a)} \in Inn(A)$ فإن $Inn(A)$ مثالي في $Der(A)$

لنبرهن أن $Z(A)$ حلقة جزئية من $A$ لدينا $[0,z]=0$ ومنه $0\in Z(A)$، ليكن $a,b\in Z(A)$ ... فإن لكل $z\in A$ فإن

$[a-b,z] = [a,z] - [b,z] = 0$ ومنه $a-b\in Z(A)$، أيضا لكل $\alpha\in R$ فإن

$[\alpha a, z] = \alpha[a,z] = \alpha\cdot 0 = 0$، ومنه $\alpha a\in Z(A)$

وبقي أن نبرهن أن $d(a)\in Z(A)$

$[d(a),z] = d[a,z] - [a,dz] = 0$

ومنه $Z(A)$ مثالي في $A$.

نعرف التطبيق $\psi : A \to Inn(A)$ بالشكل التالي: لكل $a\in A$ فإن $\psi(a) = d_a$ نبين أن $\psi$ ...

$\forall a,b\in A,\ a=b \Rightarrow d_a = d_b \Rightarrow \psi(a)=\psi(b)$

$\forall a,b\in A,\ \psi(a+b) = d_{a+b} = d_a + d_b = \psi(a)+\psi(b)$

وإذا كان $d_c\in Inn(A)$ فإن $c\in A$ ... $\psi(c) = d_c$

ومنه $\frac{A}{Ker\,\psi} \cong Inn(A)$ إذا $Z(A) = Ker\,\psi$ ... فإن $a\in A$

ومنه $a\in Z(A)$ فإن $[a,x]=0$ ... $\psi(a) = d_a = 0$

ومنه $z\in Ker\,\psi$ ... $Ker\,\psi \subseteq Z(A)$ ... $b\in Z(A)$ فإن $[b,z]=0$

$Z(A) = Ker\,\psi$.